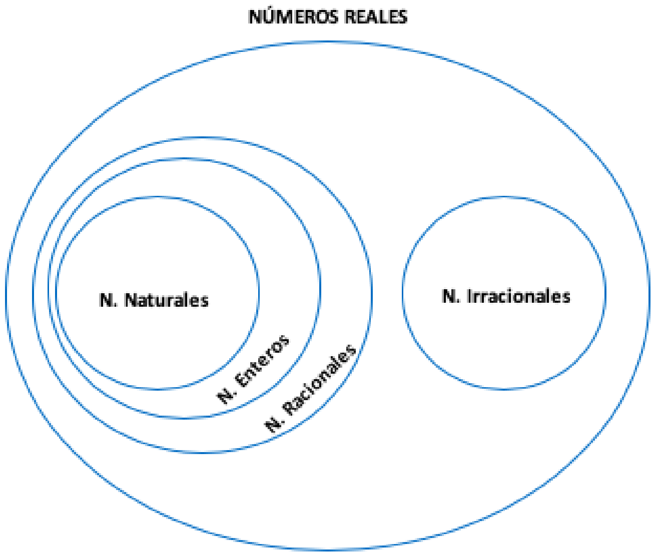
UNIDAD I: LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales (**IR**) es la unión entre el conjunto de los números racionales (**Q**) y los irracionales (**I**). Recordemos que el conjunto de los números racionales incluye a los conjuntos de los números naturales (**IN**) y de los números enteros (**Z**). La diferencia entre los números racionales y los irracionales es que los segundos no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros (por ejemplo $\sqrt{2}, \pi$, etc.)

A continuación, se presenta un diagrama con la organización de los números reales:

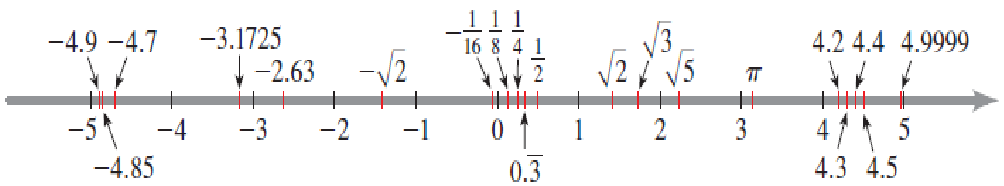


Algunas propiedades de los números reales son:

- Es un conjunto con infinitos números, no hay primer ni último elemento.

- Es un conjunto denso, lo cual quiere decir que entre dos números reales hay infinitos números reales.

- Todos los números pueden ser representados en una recta numérica, la cual recibe el nombre de *Recta Real*. Esta recta tiene la particularidad de que a cada número real le corresponde un punto en la recta, y a todo punto de la recta le corresponde un número real.



Operaciones en **IR**:

1. ADICIÓN

Propiedades de la adición en **IR**:

a) Asociativa: para todo número real x, y, z se cumple que:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

b) Conmutativa: para todo número real x, y se cumple que:

$$x + y = y + x$$

c) Existencia del elemento neutro "0": para todo número real x existe el número real 0, el cual cumple que:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

d) Existencia de elemento opuesto: para todo número real x existe el número real -x, el cual cumple que:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

2. MULTIPLICACIÓN

Propiedades de la multiplicación en **IR**:

a) Asociativa: para todo número real x, y, z se cumple que:

$$(x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z)$$

b) Conmutativa: para todo número real x, y se cumple que:

$$x \,.\, y = y \,.\, x$$

c) Existencia del elemento neutro "1": para todo número real x existe el número real 1, el cual cumple que:

$$x \,.\, 1 = 1 \,.\, x = x$$

d) Existencia de elemento inverso: para todo número real x existe el número real $x^{-1} = \frac{1}{x}$, el cual cumple que:

$$x \,.\, x^{-1} = x^{-1} \,.\, x = 1$$

e) Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: para todo número real x, y, z se cumple que:

$$x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$$

3. POTENCIACIÓN

Antes de ver las propiedades de la potenciación en **IR**, recordemos que:

$$x^n = x \,.\, x \,.\, x \,.\, x \ldots (n\ veces)$$

Donde x es la base, n es el exponente y x^n es la potencia.

a) Producto de potencias de igual base:

$$a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$$

b) Cociente de potencias de igual base:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

c) **Potencia de una potencia**:

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

d) **Distributiva de potenciación con respecto a la multiplicación**:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

e) **Distributiva de potenciación con respecto a la división**:

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

f) **Para cualquier número real a**: $a^1 = a$

Para cualquier número real a, con a≠0: $a^0 = 1$

g) **Para cualquier número real a, con a≠0, se cumple que**:

$$a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$$

4. RADICACIÓN:

Antes de ver las propiedades de radicación en **IR**, recordemos que:

$$\sqrt[n]{a} = b \; <=> \; b^n = a$$

Donde n es el índice de la raíz, a es el radicando y b es la raíz.

a) **Raíz de una raíz**:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

b) **Distributiva de radicación con respecto a la multiplicación**:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$$

c) **Distributiva de radicación con respecto a la división**:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

d) **Multiplicación y división de índice y exponentes por un mismo valor**:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.r]{a^{m.r}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^{\frac{m}{r}}}$$

e) **Expresión de un radical como potencia de exponente fraccionario**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Extracción de factores de un radical:

Con las propiedades estudiadas anteriormente, podemos simplificar diferentes expresiones que contengan raíces, lo cual nos servirá para resolver diferentes ejercicios. ¡Recordar de, siempre que sea posible, factorizar el radicando!

Algunos casos son:

1. Si el exponente del radicando es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando. Por ejemplo:

   a) $\sqrt{6} = \sqrt{2.3}$

b) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$

2. Si el exponente del radicando es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando. Por ejemplo:

a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2.3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3.3} = 3\sqrt[3]{3}$

3. Si el exponente del radicando es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido (es decir, el resultado de la división) es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando. Por ejemplo:

a) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2}$

b) $\sqrt{48} = \sqrt{2^4.3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

<u>Introducción de factores en un radical:</u>

Para introducir factores en un radical se elevan los factores (que queramos introducir al radical) al índice del radical. Es decir:

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n.b}$

Por ejemplo:

$5\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5^4.3}$

<u>Suma de radicales semejantes:</u>

Solamente pueden sumarse (o bien, restarse) dos radicales cuando son **semejantes**. Pero, ¿Qué quiere decir que dos radicales sean semejantes? Dos radicales son semejantes cuando tienen mismo índice y radicando. Por ejemplo:

a) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$: como no tienen igual radicando no son semejantes, con lo cual no puedo sumarlos.

b) $\sqrt{8} - \sqrt{32}$: a primera vista uno diría que estos radicales no son semejantes, pero para ello estudiamos las propiedades anteriores. Observemos que:

$$\sqrt{8} - \sqrt{32} = \sqrt{2^3} - \sqrt{2^5} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

Los pudimos operar porque ambos radicales son semejantes.

Multiplicación de radicales:

Los radicales pueden multiplicarse entre sí y encontraremos dos casos. Cuando los índices son iguales y cuando los índices son diferentes. Analicemos cada caso:

1. **Radicales de igual índice**:
   Para multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice. Por ejemplo:
   a) $\sqrt{5}\,.\sqrt{5} = \sqrt{5\,.\,5} = \sqrt{25} = 5$

   b) $\sqrt[3]{3.x^2}\,.\sqrt[3]{9\,.\;x^5} = \sqrt[3]{3\,.\,9\,.\,x^2\,.\,x^5} = \sqrt[3]{3^3\,.\,x^7} = 3\;x^2\sqrt[3]{x}$

2. **Radicales de distinto índice**:
   Para multiplicar radicales de distinto índice, debemos hallar el m.c.m. (mínimo común múltiplo) entre los índices con el fin de que nos queden radicales de igual índice. Pero debemos multiplicar también a los exponentes de los factores que forman el radicando (es conveniente repasar la propiedad d) de radicación, en la página 3). Veamos un ejemplo:
   a) $\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{25} = \sqrt[2.3]{2^{1.3}}\,.\sqrt[3.2]{5^{2.2}} = \sqrt[6]{2^3}.\sqrt[6]{5^4}$

   b) $\sqrt{3}.\sqrt[3]{9}\,.\sqrt[4]{27} = \sqrt[2.6]{3^{1.6}}\,.\sqrt[3.4]{3^{2.4}}\,.\sqrt[4.3]{3^{3.3}} = \sqrt[12]{3^6}\,.\sqrt[12]{3^8}\,.\sqrt[12]{3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$

Racionalización de denominadores:

La racionalización de denominadores consiste en eliminar los radicales del denominador, con el fin de facilitar el cálculo de diferentes como la suma o resta de fracciones. Recordemos que multiplicar y dividir por el mismo número equivale a multiplicar por 1, lo cual sabemos que no altera la expresión que tengamos (este será el truco que usaremos en general). Distinguiremos 3 casos, los cuales se desarrollarán a continuación:

1. Del tipo: $\boldsymbol{\frac{a}{b\sqrt{c}}}$
   En este caso multiplicaremos y dividiremos por $\sqrt{c}$.

   $$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a}{b\sqrt{c}}\,.\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b.\sqrt{c^2}} = \frac{a\sqrt{c}}{b.c}$$

   Por ejemplo:

   $$\frac{3}{4\sqrt{7}} = \frac{3}{4\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{49}} = \frac{3\sqrt{7}}{28}$$

2. Del tipo: $\boldsymbol{\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}}$
   En este caso multiplicaremos y dividiremos por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$, con el fin de que los exponentes de los factores del radicando sean múltiplos del índice (y así poder simplificar la raíz).

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}=\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{c^{n-m}}}{\sqrt[n]{c^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}.\sqrt[n]{c^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}}=\frac{a\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b.c}$$

Por ejemplo:

$$\frac{7}{3\sqrt[5]{16}}=\frac{7}{3\sqrt[5]{2^4}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}}=\frac{7\sqrt[5]{2}}{3.\sqrt[5]{2^5}}=\frac{7\sqrt[5]{2}}{3.2}=\frac{7\sqrt[5]{2}}{6}$$

3. Del tipo: $\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}+\sqrt{\boldsymbol{c}}}$

También se incluyen en este caso cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Multiplicaremos y dividiremos por el conjugado del denominador (recordemos que el conjugado de un binomio es igual a dicho binomio con el signo central cambiado).

También usaremos uno de los casos de factoreo (los cuales veremos con detalle más adelante): la diferencia de cuadrados. La diferencia de cuadrados dice que

$$(a+b).(a-b)=a^2-b^2$$

Entonces:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a.(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c}).(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a.(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{\sqrt{b^2}-\sqrt{c^2}}=\frac{a.\sqrt{b}-a.\sqrt{c})}{b-c}$$

Por ejemplo:

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{4.(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{\sqrt{2^2}-\sqrt{5^2}}=\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{2-5}=-\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{3}$$

Notación decimal y números periódicos

La notación decimal es otra manera de escribir a los números que son expresados en fracciones decimales (o simplemente fracciones). Por ejemplo:

$$4=\frac{4}{1}=4{,}0$$

$$\frac{8}{10}=0{,}8$$

Un número decimal periódico es un número racional con parte fraccionaria caracterizado por tener un período (cifras distintas de cero que se repiten indefinidamente). Los números periódicos pueden ser de dos tipos:

– Número periódico puro: cuando inmediatamente después de la coma hay una o más cifras repetitivas hasta el infinito, sin ser todas cero.
Ejemplo: $34{,}555\ldots = 34,\hat{5}$

– Número periódico mixto: cuando después de la coma hay una o más cifras que no se repiten, seguidas por una o más cifras que sí lo hacen, sin ser todas cero.
Ejemplo: $21{,}17888\ldots = 21{,}17\hat{8}$

Para pasar un número periódico expresado en notación decimal a fracción debemos seguir la siguiente regla. En el numerador irá todo el número (sin la coma) menos la parte NO periódica y en el denominador tantos 9 como cifras periódicas tenga el número y tantos 0 (luego de el o los 9) como cifras decimales no periódicas tenga el número. Por ejemplo:

$$3,\hat{6} = \frac{36-3}{9} = \frac{33}{9}$$

$$4,\widehat{12} = \frac{412-4}{99} = \frac{408}{99}$$

$$2{,}1\hat{6} = \frac{216-21}{90}$$

Redondeo

Para redondear un número a un determinado orden tenemos que fijarnos en la cifra que se encuentra a la derecha de la que queremos redondear:

– Si esa cifra es mayor o igual que 5, aumentamos en una unidad la cifra a redondear.
– Si esa cifra es menor que 5, la dejamos igual.

Por ejemplo:

2,5781 redondeado al orden de los décimos es 2,6.

2,5781 redondeado al orden de los centésimos es 2,58.

2,5781 redondeado al orden de los milésimos es 2,578.

Notación científica

La notación científica se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños de manera abreviada. Un número está escrito en notación científica cuando se expresa como producto entre una potencia de 10 y un número mayor que 1 y menor que 10.

Por ejemplo:

$$1.600 = 1{,}6 \,.\, 10^3$$

$$23.600.000 = 2{,}36 \,.\, 10^7$$

$$0{,}0345 = 3{,}45 \,.\, 10^{-2}$$

$$0{,}00078 = 7{,}8 \,.\, 10^{-4}$$